

Najpiękniejszy wzór matematyki:

Tożsamość Eulera

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

Dlaczego jeden prosty zapis fascynuje największe umysły świata?

I

Wstęp i Kontekst Historyczny

Dlaczego jest taki niezwykły?

Wzór ten łączy **5** fundamentalnych stałych matematycznych, które pozornie nie mają ze sobą nic wspólnego; oraz **3** działania arytmetyczne.

5 stałych matematycznych:

1. *liczba 0* - nicość
2. *liczba 1* - jedność
3. *liczba π* - królowa geometrii.
4. *liczba e* - podstawa wzrostu i analizy (liczba Eulera).
5. *liczba i* - jednostka urojona, klucz do liczb zespolonych.

3 działania arytmetyczne:

1. dodawanie
2. mnożenie
3. potęgowanie

Dodatkowo każde z powyższych działań oraz stałych użyte są ***dokładnie raz***.

Tożsamość Eulera łączy trzy różne światy: analizę (liczba e), geometrie (liczba π) oraz algebrę (liczba i).

Leonhard Euler - Kim był?

Kim był?: Szwajcarski matematyk i fizyk, jeden z największych geniuszy w historii (1707-1783).

Dorobek: Napisał ponad 800 prac naukowych, kształtując niemal każdą dziedzinę matematyki. Wprowadził większość współczesnej notacji (symbole: $f(x)$, e , π , ...).

Niełomność: Przez ostatnie 17 lat życia był całkowicie niewidomy. Dzięki genialnej pamięci i wyobraźni dyktował swoje prace asystentom, publikując w tym czasie więcej niż kiedykolwiek wcześniej.



Droga do odkrycia.

Tożsamość nie powstała z przypadku, była ukoronowaniem prac Eulera nad funkcjami wykładniczymi i trygonometrią.

1. **Fundament (Wzór Eulera):** Kluczowym krokiem było odkrycie ogólniejszego wzoru: $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$. Euler zauważył, że liczby zespolone można opisać za pomocą funkcji sinus i cosinus.
2. **Szeregi potęgowe:** Euler doszedł do tego, analizując nieskończone sumy (szeregi). Zauważył, że po dodaniu do siebie szeregów sinusa i cosinusa, otrzymuje się dokładnie szereg funkcji e^x .
3. **Genialne podstawienie:** Najśłynniejszy wzór świata ($e^{i\pi} + 1 = 0$) powstał, gdy Euler podstawiał pod x wartość liczby π . Wtedy sinus wyzerował się, a cosinus przyjął wartość -1 , spajając najważniejsze stałe matematyczne w jedną całość.

II

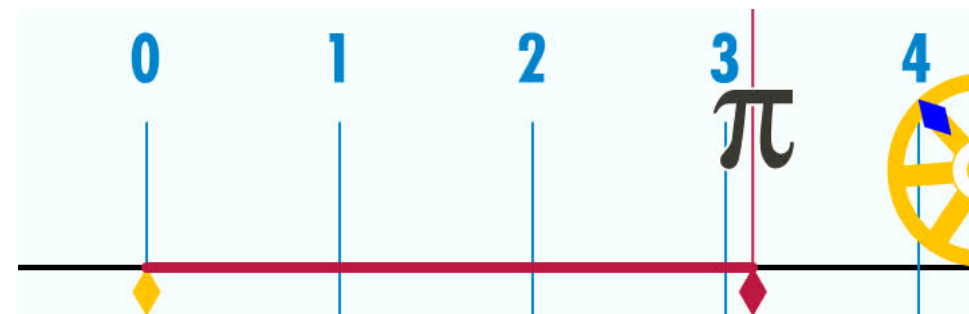
Trzy Filary

π

e

i

π - Królowa geometrii.



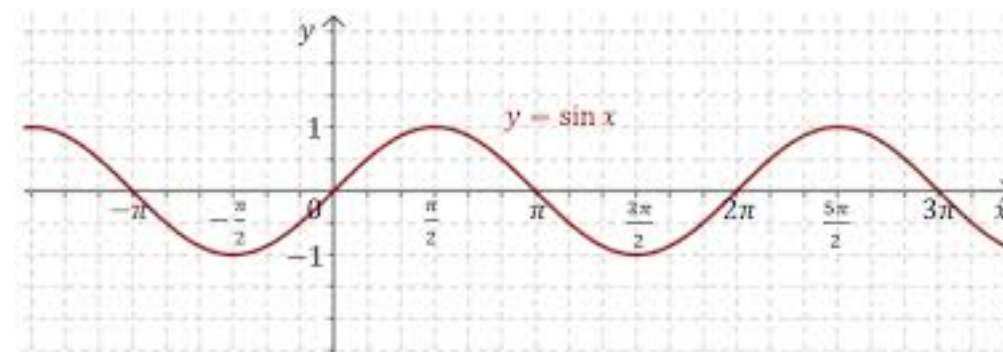
Definicja: Stała określająca stosunek obwodu koła (czyli długości okręgu) do długości jego średnicy; stosunek ten jest niezależny od wielkości koła, gdyż wszystkie koła są do siebie podobne.

Własności: Liczba π jest niewymierna i przestępna ($\approx 3,14159\dots$).

$\pi \approx 3,141592\ 653589\ 793238\ 462643\ 383279\ 502884\ 197169\ 399375\ 105820\ 974944\ 592307\ 816406\ 286208$
 $998628\ 034825\ 342117\ 067982\ 148086\ 513282\ 306647\ 093844\ 609550\ 582231\ 725359\ 408128\ 481117$
 $450284\ 102701\ 938521\ 105559\ 644622\ 948954\ 930381\ 964428\ 810975\ 665933\ 446128\ 475\dots$



Znaczenie: Jest fundamentem wszystkiego, co krągłe i cykliczne we wszechświecie, od ruchu planet po fale dźwiękowe.



π - Poza geometrią.

π pojawia się w miejscach, gdzie nie ma kół, np. w sumach nieskończonych (szeregi).

π jest wpisane w samą strukturę liczb, a nie tylko w kształty.

Przykłady:

- szereg Leibniza - Gottfried Wilhelm Leibniz

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots$$

- rozwiązanie problemu bazylejskiego – Leonhard Euler

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots$$

e - Podstawa wzrostu i analizy.

Definicja: Liczba ***e*** może być zdefiniowana na kilka równoważnych sposobów.

Przykłady:

- Jako **granica ciągu** (Granica wzrostu przy ciągłym naliczaniu odsetek):

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

- Jako **suma szeregu**:

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots,$$

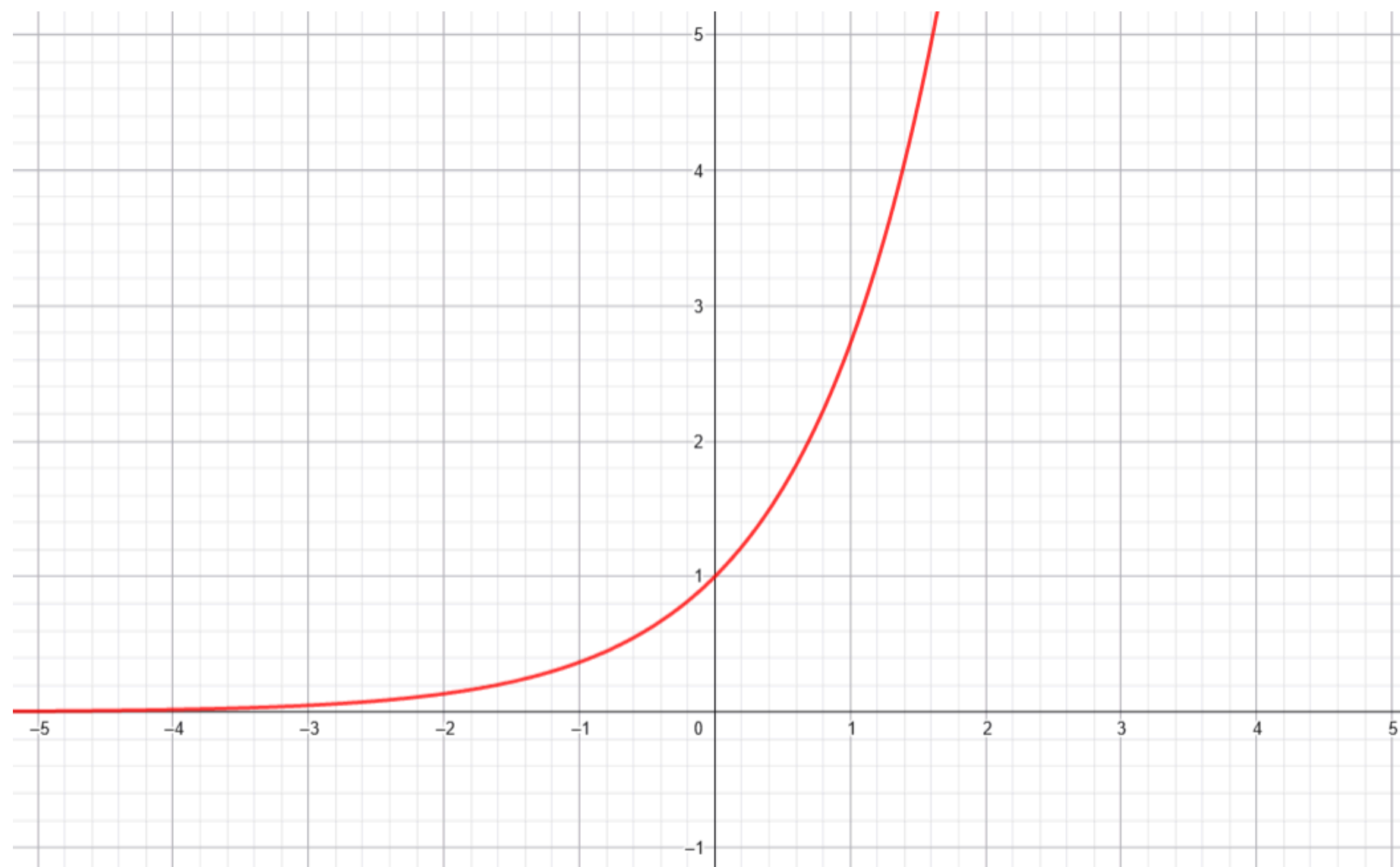
Własności: Liczba ***e*** jest niewymierna i przestępna ($\approx 2,71828\dots$). Jest podstawą logarytmu naturalnego ($\ln x = \log_e x$).

Gdzie ją znajdziemy: W wielu dziedzinach matematyki i fizyki (np. w opisie wzrostu populacji, lub rozpadu atomów).

e - Jedyna taka funkcja (e^x).

Unikalna cecha: Funkcja $f(x) = e^x$ jest swoją własną pochodną: $f'(x) = f(x)$.

Co to oznacza: Tempo wzrostu tej funkcji w dowolnym punkcie jest równe jej aktualnej wartości.



i - Liczby, które “nie istnieją”?

Definicja:

- Liczba urojona - liczba, której kwadrat jest liczbą ujemną.
- Liczba zespolona - liczba, która łączy w sobie część rzeczywistą i urojoną.

$$i = \sqrt{-1}$$

$$\uparrow$$
$$i^2 = -1$$

$$z = a + bi, \text{ gdzie } a, b \in R, z \in C$$

**C - zbiór liczb zespolonych*

Wartość: $i = \sqrt{-1}$

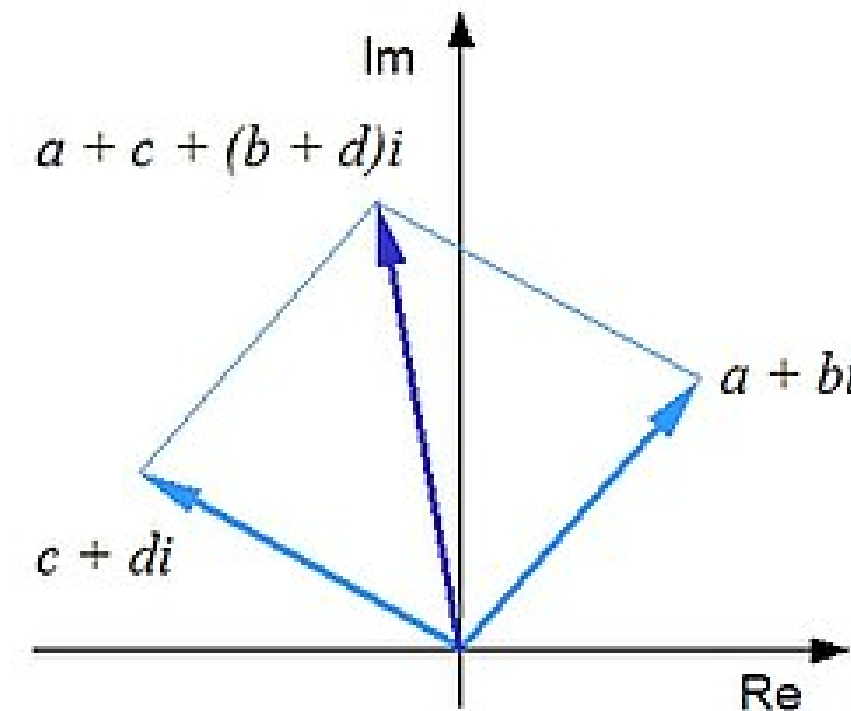
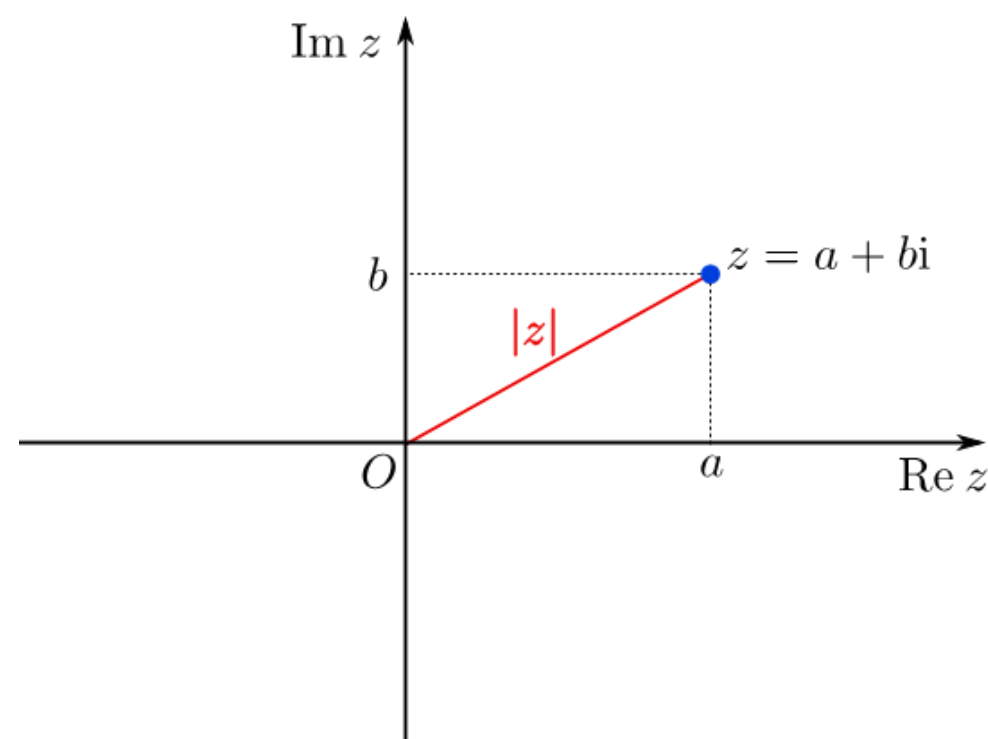
Znaczenie: Liczby zespolone to nie tylko teoria, umożliwiają precyzyjne obliczenia w elektronice, radiokomunikacji i fizyce kwantowej, ponieważ idealnie opisują fale oraz prąd zmienny. Bez nich nie byłoby smartfonów, Wi-Fi ani nowoczesnych procesorów.

i - Płaszczyzna Zespółona - Nowy Wymiar.

Idea: Liczba zespolona $z = a + bi$ pozwala nam wyjść poza zwykłą oś liczbową.

Interpretacja: Oś pozioma to liczby rzeczywiste, oś pionowa to liczby urojone.

Zastosowania: Płaszczyzna zespolona zamienia trudne wzory na geometrię: liczbę $z = a + bi$ traktujemy jako punkt (x, y) , co pozwala opisywać fale za pomocą prostych obrotów i wektorów zamiast skomplikowanej trygonometrii. Dla fizyków to ogromne uproszczenie, bo zamiast liczyć sinusy, operują na położeniu punktów na płaszczyźnie.



III

Dowód

Dowód - 1 - Szeregi Taylora

Każdą funkcję (jak e^x , $\sin$, $\cos$) możemy zapisać jako sumę nieskończenie wielu potęg x za pomocą Szeregów Taylora.

Wzory bazowe:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$$

Dowód - 2 - Wielkie Podstawienie

Co się stanie, jeśli w miejsce x w szeregu e^x wstawimy ix ?

$$e^{ix} = 1 + (ix) + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \frac{(ix)^5}{5!} + \dots$$

**Pamiętając, że: $i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1, i^5 = i$*

Po uproszczeniu:

$$e^{ix} = 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - \frac{ix^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{ix^5}{5!} \dots$$

Dowód - 3 - Grupowanie i Porządek

Rozdzielmy wyrazy "rzeczywiste" od "urojonych":

$$e^{i\pi} = \underbrace{\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \dots\right)}_{\cos(x)} + i \underbrace{\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \dots\right)}_{\sin(x)}$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$$

Dowód - 4 - Finał Dowodu - Wzór Eulera

Z powyższego grupowania wynika ogólny wzór:

$$e^{ix} = \underbrace{\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \dots\right)}_{\cos(x)} + i \underbrace{\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \dots\right)}_{\sin(x)}$$

$$e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x)$$

Podstawiamy pod **x** wartość **π**:

$$e^{i\pi} = \cos(\pi) + i \sin(\pi)$$

Wiemy, że **cos(π) = -1** oraz **sin(π) = 0**. Zatem:

$$e^{i\pi} = -1 + i(0) \implies e^{i\pi} = -1$$

Przenosząc 1 na lewą stronę, otrzymujemy:

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

Q.E.D. (Co Należało Udowodnić)

IV

Zakończenie

Dlaczego to jest ważne dla **matematyków**?

Tożsamość ta jest uznawana za „najpiękniejszy wzór”, ponieważ w elegancki sposób łączy pięć fundamentalnych i pozornie niezwiązanych ze sobą stałych. Stanowi ona pomost między różnymi dziedzinami matematyki: arytmetyką, geometrią i analizą, sprowadzając skomplikowane funkcje trygonometryczne do prostszej formy wykładniczej.

Dlaczego to jest ważne dla ***n*iematematyków**?

Wzór ten jest „silnikiem” nowoczesnej technologii, ponieważ pozwala łatwo opisywać i przetwarzać fale oraz drgania. Bez niego nie istniałaby dzisiejsza elektronika (smartfony, Wi-Fi), systemy GPS czy zaawansowana medycyna (rezonans magnetyczny), ponieważ to właśnie to równanie pozwala inżynierom błyskawicznie przeliczać sygnały radiowe i elektryczne.

Refleksja - Odkrycie czy Wynalazek?

Odkrycie to poznanie lub zidentyfikowanie czegoś, co już istniało w naturze, ale dotychczas było nieznane (np. ognia, ameryki, penicyliny).

Wynalazek to stworzenie czegoś nowego, co wcześniej nie istniało, będące efektem twórczego wysiłku i rozwiązań technicznych (np. żarówka, koło, pismo).

Wzór Eulera sugeruje, że matematyka jest uniwersalnym prawem natury.

Euler nie „wymyślił”, że te liczby się tak łączą, on odkrył głęboką, istniejącą od zawsze prawdę o strukturze naszego wszechświata.

Matematyka jest odkrywana, ponieważ jej struktury, takie jak liczby pierwsze czy geometria, istnieją obiektywnie, niezależnie od ludzkiej świadomości.

Symbole (notacja) to wynalazek, ale relacje między nimi są odwieczne i uniwersalne, tak samo zadziałają w każdej części wszechświata. Matematycy są jak odkrywcy kontynentów, a nie ich twórcy. Dlatego matematykę się odkrywa.

Zakończenie

Dziękuję za uwagę. Mam nadzieję, że teraz ten wzór wydaje się Wam równie piękny, co mi.

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

Wykonał: Igor Łangowski